

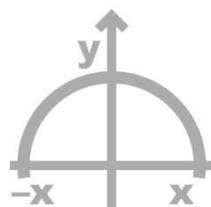
אלגברה לינארית




$$\sqrt{2}$$




$$\{\sqrt{x}\}^2$$



תוכן העניינים

1	. המרכיב R ⁸ ת.
15	. פתרונו וחקירת מערכת משווהות ליניאריות
21	. מטריצות
27	. דטרמיננטות
32	. ערכים עצמאיים, וקטוריים עצמאיים ולכ索ן מטריצות

אלגברה ליניארית

פרק 1 - המרחב \mathbb{R}^n

תוכן העניינים

1	. וקטורים
6	. מרחב וקטורי
7	. צירופים ליניאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית
9	. בסיס ומימד, דרגה של מטריצה
12	. חיתוך, סכום וסכום ישיר של תת-מרחבים
14	. וקטור קוודינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס

וקטורים

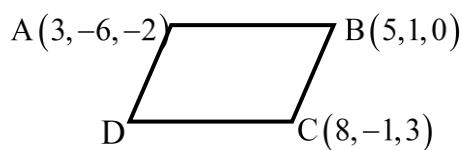
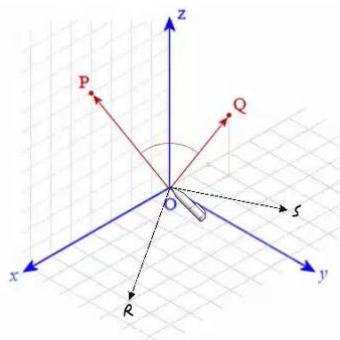
הערת סימון: אנו נסמן את הווקטור \vec{u} כך: $\underline{\underline{u}}$. סימונים מקובלים נוספים הם: \underline{u} , \vec{u} .

את גודל הווקטור $\underline{\underline{u}}$ נסמן כך $| \underline{\underline{u}} |$. סימון מקובל נוספת הוא $\| \underline{\underline{u}} \|$.

גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

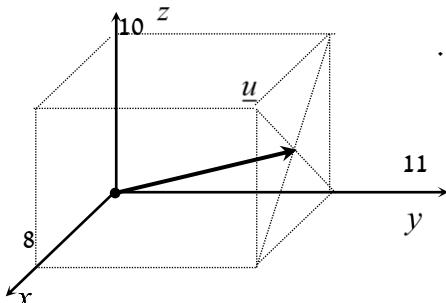
שאלות

- 1) רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{S}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{P}$ שבאיור.
הנימו שאורך ורוחב כל משਬצת באיזור הוא יחידה אחת.

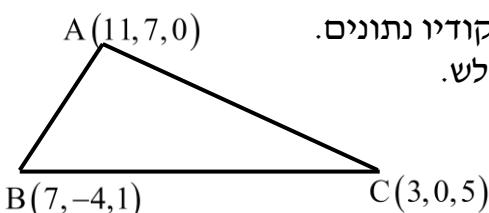


- בشرطוט הבא נתונה מקבילית,
ששיעוריה שלושה מקדוקדיות נתוניות.
מצאו את שיעורי הקדוקוד D.
רמז: היעזרו בנוסחת אמצע קטע.

- 3) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים.
מצאו מהו הווקטור $\underline{\underline{u}}$ על פי הشرطוט.



- 4) בشرطוט הבא נתון משולש שישעורי קדוקדיות נתונים.
מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

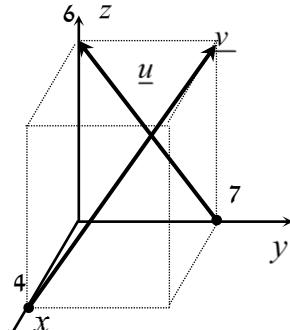


(5) ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור \vec{EF} , אם נתנות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה N , אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$ ו-

$$\vec{MN} = (-1, -1, 9).$$



(6) נתונה תיבת שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלפניך.

מצאו מהו הווקטור \underline{u} ומהו הווקטור \underline{v} .

(7) מצאו את x , y ו- z , אם נתון ש- $\underline{u} = \underline{v}$, כאשר $\underline{u} = (4, -1, 2)$

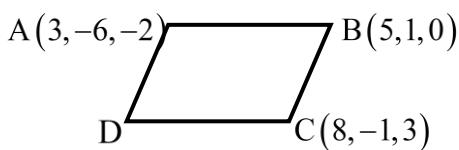
$$\underline{v} = (z-2, y+1, x-3).$$

(8) נתונות הנקודות הבאות:

. $A(1,0,2)$, $B(3,7,-4)$, $C(6,9,0)$, $D(7,4,10)$, $E(9,11,4)$

א. הראו כי: $\vec{AB} = \vec{DE}$.

ב. האם ניתן לומר כי גם $\vec{AD} = \vec{BC}$? נמקו.



(9) בשרטוט נתונה מקבילית, ששיעוריה שלושה מקדוקדייה נתוניים.

מצאו את שיעורי הקדקוד D .

* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.

. $\underline{w} = (2, 6, -5)$, $\underline{u} = (4, -2, -6)$, $\underline{v} = (-3, 1, 4)$

* **בשאלות 13, 14, 16** הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(10) חשבו:

$$3\underline{u} - 2\underline{v}$$

$$-0.5\underline{v}$$

$$2\underline{u}$$

א.

ב.

ג.

(11) חשבו:

$$\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$$

ב.

$$0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$$

ג.

$$2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$$
 (12)

$$\underline{u} / |\underline{u}|$$
 (13)

$$d(\underline{u}, \underline{v})$$
 (14)

$$\underline{v} \cdot \underline{u} + 2\underline{w} \cdot \underline{v}$$
 (15)

$$\text{proj}(\underline{u}, \underline{v})$$
 (16)

בשאלות 19-17 נתונות הנקודות C(3, -1, 2), B(4, 2, -1), A(1, -3, 0) ויש למצוא את הווקטורים:

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$$
 (17)

$$2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}$$
 (18)

$$2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$$
 (19)

(20) נתונים ארבעת קדקודיו המרובע ABCD :

$$A(-4, 2, 1), B(0, 2, -1), C(-3, -5, 0), D(-7, -5, 2)$$

הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.

21) נתונים ארבעת קודקודיו המרובע : $ABCD$

$$\text{. } A(1,2,0) , B(-2,5,3) , C(-1,8,4) , D(4,3,-1)$$

א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

22) חשבו את הזווית שבין הווקטוריים \underline{u} ו- \underline{v} , כאשר :

$$\underline{u} = (-2, 2, 5) , \underline{v} = (4, 0, 1) . \text{ א.}$$

$$\underline{u} = (6, -3, 1) , \underline{v} = (2, 5, 3) . \text{ ב.}$$

$$\underline{u} = (-2, 1, 3) , \underline{v} = (4, -2, -6) . \text{ ג.}$$

תשובות סופיות

$$\vec{P} = (4, 0, 7), \quad \vec{Q} = (-2, 1, 3), \quad \vec{R} = (6, 4, 0), \quad \vec{S} = (-2, 4, 0) \quad \text{(1)}$$

$$D = (6, -8, 1) \quad \text{(2)}$$

$$\underline{u} = (4, 11, 5) \quad \text{(3)}$$

$$M = (7, 1, 2) \quad \text{(4)}$$

$$N = (-1, -5, 10) \quad \text{ב.} \quad \overrightarrow{EF} = (5, -1, 0) \quad \text{א.} \quad \text{(5)}$$

$$\underline{u} = (0, -7, 6), \quad \underline{v} = (-4, 7, 6) \quad \text{(6)}$$

$$z = 6, \quad y = -2, \quad x = 5 \quad \text{א.} \quad \text{(7)}$$

. ב. לא. שאלת הוכחה. (8)

$$D = (6, -8, 1) \quad \text{(9)}$$

$$(-17, 7, 24) \quad \text{ג.} \quad (-2, 1, 3) \quad \text{ב.} \quad (-6, 2, 8) \quad \text{א.} \quad \text{(10)}$$

$$(9.5, 9.5, -18) \quad \text{ב.} \quad (2.5, -1, -3.5) \quad \text{א.} \quad \text{(11)}$$

$$(19, 19, -36) \quad \text{(12)}$$

$$\left(\frac{-3}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}} \right) \quad \text{(13)}$$

$$\sqrt{158} \quad \text{(14)}$$

$$14 \quad \text{(15)}$$

$$\underline{u}^* \quad \text{(16)}$$

$$(5, 7, 1) \quad \text{(17)}$$

$$(-8, -16, 8) \quad \text{(18)}$$

$$(8, 12, 0) \quad \text{(19)}$$

. שאלת הוכחה. (20)

. ב. כן. א. שאלת הוכחה. (21)

$$\alpha = 180^\circ \quad \text{ג.} \quad \alpha = 90^\circ \quad \text{ב.} \quad \alpha = 97.277^\circ \quad \text{א.} \quad \text{(22)}$$

מרחב וקטורי

שאלות

בשאלות 1-7 בדקו האם W תת-מרחב של \mathbb{R}^3 :

$$W = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0\} \quad (1)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = c\} \quad (2)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = 3b\} \quad (3)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a < b < c\} \quad (4)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = c^2\} \quad (5)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid c - b = b - a\} \quad (6)$$

כלומר, a, b, c מהווים סדרה חשבונית.

$$W = \{(a, b, c) \mid b = a \cdot q, c = a \cdot q^2\} \quad (7)$$

כלומר, a, b, c מהווים סדרה הנדסית.

תשובות סופיות

- (1) כן
- (2) כן
- (3) כן
- (4) לא
- (5) לא
- (6) כן
- (7) לא

צירופים לינאריים, פרישה לינארית ותלות לינארית

בשאלות 1-7 נתונים הווקטורים הבאים :

$$u_1 = (4, 1, 1, 5), \quad u_2 = (0, 11, -5, 3), \quad u_3 = (2, -5, 3, 1), \quad u_4 = (1, 3, -1, 2)$$

- (1) א.** האם u_1 הוא צירוף לינארי של u_4 ?
ב. האם u_1 שייך ל- $\{Sp\{u_4\}$?
ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_4\}$ תלולה לינארית?
- (2) א.** האם u_3 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
ב. האם u_3 שייך ל- $\{Sp\{u_1, u_2\}$?
ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ תלולה לינארית?
 במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.
- (3) א.** האם u_4 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
ב. האם u_4 שייך ל- $\{Sp\{u_1, u_2\}$?
ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_4\}$ תלולה לינארית?
 במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.
- (4) נתון** $v = (4, 12, k, -2k)$.
א. מה צריך להיות ערכו של k , על מנת שהווקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
ב. מה צריך להיות ערכו של k , על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $\{Sp\{u_1, u_2\}$?
ג. מה צריך להיות ערכו של k , על מנת שהקבוצה $\{u_1, u_2, v\}$ תהיה תלולה לינארית?
- (5) נתון** $v = (a, b, c, d)$.
א. מה התנאים על a, b, c, d , על מנת שהווקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
ב. מה התנאים על a, b, c, d , על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $\{Sp\{u_1, u_2\}$?
ג. מה התנאים על a, b, c, d , על מנת שהקבוצה $\{u_1, u_2, v\}$ תהיה תלולה לינארית?

6) הבינו את הווקטור $(10, 8, 0, 14)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2 ו- u_3, u_4 .
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

7) הבינו את הווקטור $(7, 10, -2, 11)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 ו- u_4 .
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

8) עבור أيיה ערכים של a, b, c , הווקטורים הבאים תלויים ליניארית:
 $\{(c, 2, 4), (2.4, a, 2), (c, b, 6), (b, 2, a)\}$

תשובות סופיות

1) א. לא. ב. לא. ג. לא.

2) א. כן. ב. כן. ג. כן.

3) א. כן. ב. כן. ג. כן,

4) א-ג. $k = -4$

5) $a = 5t + 3s, b = 4t - 13s, c = 7s, d = 7t$

6) איןソו.

7) איןソו.

8) לכל ערך של c a, b, c

בסיס וממד, דרגה של מטריצה

שאלות

(1) בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- \mathbb{R}^3 :

א. $\{(1,0,1), (0,0,1)\}$

ב. $\{(1,1,2), (1,2,3), (3,3,4), (2,2,1)\}$

ג. $\{(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)\}$

(2) נתונה קבוצה וקטוריים ב- \mathbb{R}^3 . $T = \{(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9), (2,3,4)\}$

א. האם T בסיס ל- \mathbb{R}^3 ?

ב. מצאו קבוצה T' , שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים, בלתי תלולה ליניארית ב- T .

ג. השלימו את T' לבסיס של \mathbb{R}^3 .

מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית

(3) להלן שלוש מערכות של משוואות הומוגניות :

$$\begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ 2x - 2y + 2z + 2w = 0 \end{cases} .3 \quad \begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ x + 2z - w = 0 \\ x + y + 3z - 3w = 0 \end{cases} .2 \quad \begin{cases} x + y - z + 2w = 0 \\ 3x - y + 7z + 4w = 0 \\ -5x + 3y - 15z - 6w = 0 \end{cases} .1$$

נסמן ב- W את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 1.

נסמן ב- U את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 2.

נסמן ב- V את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 3.

מצאו בסיס וממד ל- W , U ו- V .

(4) נתון $.U = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = c, b = d\}$

מצאו בסיס וממד ל- U .

(5) נתון $.U = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid c = a + b, d = b + c\}$

מצאו בסיס וממד ל- U .

(6) נתון $.U = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid v \cdot (1, -1, 1, -1) = 0\}$

מצאו בסיס וממד ל- U .

מציאת בסיס וממד ל תת-מרחב

בשאלות 7 ו-8 נתונים שני תת-מרחבים של המרחב \mathbb{R}^4 :

$$U = \text{span}\{(1,1,-1,2), (3,-1,7,4), (-5,3,-15,-6)\}$$

$$V = \text{span}\{(1,-1,1,1), (1,0,2,-1), (1,1,3,-3), (5,1,5,8)\}$$

7) מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- U .

8) מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- V .

מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה

בשאלות 9 ו-10 מצאו בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצה, וציינו את דרגת המטריצה (rank) :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

תשובות סופיות

1) א. לא. ב. לא. ג. לא.

2) א. לא. ב. ג. $T' = \{(1,2,3), (4,5,6), (0,0,1)\}$

3) W - בסיס : $\{(-1.5, 2.5, 1, 0), (-1.5, -0.5, 0, 1)\}$, ממד : 2.

.2 - בסיס : $\{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$, ממד : 2.

U - בסיס : $\{(-1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$, ממד : 3.

V - בסיס : $\{(0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0)\}$, ממד : 2.

4) בסיס : $\{(-1, 1, 0, 1), (2, -1, 1, 0)\}$, ממד : 2.

5) בסיס : $\{(1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$, ממד : 3.

6) בסיס : $\{(1, -1, 1, 1), (0, -1, 1, -2), (0, 0, -2, 5)\}$, ממד : 3.

7) בסיס : $\{(1, 1, -1, 2), (0, -4, 10, -2)\}$, ממד : 2.

8) בסיס : $\{(4, 1, 1, 5), (0, 11, -5, 3)\}$, ממד : 2.

9) מרחב שורה : בסיס : $\{(1, 2, 1, 3, 5), (0, 11, -5, -4), (0, 0, 0, 1, 1)\}$.

מרחב עמודה : בסיס : $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, ממד : 2, דרגה : 2.

10) מרחב שורה : בסיס : $\{(1, 2, 1, 3, 5), (0, 11, -5, -4), (0, 0, 0, 1, 1)\}$.

מרחב עמודה : בסיס : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -16 \\ 37 \end{pmatrix} \right\}$, ממד : 3, דרגה : 3.

חיתוך, סכום וסכום ישיר של תת-מרחבים

שאלות

1) להלן שלוש מערכות של משוואות לינאריות הומוגניות:

$$1) \begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3x-y+7z+4w=0 \\ -5x+3y-15z-6w=0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x+2z-w=0 \\ x+y+3z-3w=0 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x-y+z+w=0 \\ 2x-2y+2z+2w=0 \end{cases}$$

נסמן ב- W , U , V את המרחבים הנפרשים ע"י פתרון המערכות 1, 2 ו- 3 בהתאם.

- א. מצאו בסיס וממד ל- U , W ו- V .
- ב. מצאו בסיס וממד ל- $U + V$.
- ג. מצאו בסיס וממד ל- $U \cap V$.

בשאלות 2-7 נתונים שני תת-מרחבים של המרחב \mathbb{R}^4 :

$$U = sp \{(1,1,-1,2), (3,-1,7,4), (-5,3,-15,-6)\}$$

$$V = sp \{(1,-1,1,1), (1,0,2,-1), (1,1,3,-3), (5,1,5,8)\}$$

- 2) מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- U .
- 3) מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- V .
- 4) מצאו בסיס וממד ל- $U + V$.
- 5) מצאו בסיס וממד ל- $U \cap V$ (פתרו בשתי דרכים שונות).

6) האם $? U + V = \mathbb{R}^4$

7) האם $? U \oplus V = \mathbb{R}^4$

תשובות סופיות

$$B_W = \{(-1.5, 2.5, 1, 0), (-1.5, -0.5, 0, 1)\} \quad , \quad \dim W = 2 . \text{ א } \quad (1)$$

$$B_U = \{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\} \quad , \quad \dim U = 2$$

$$B_V = \{(-1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\} \quad , \quad \dim V = 3$$

$$B_{U+V} = \{(0, 0, -1, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\} \quad \dim(U + V) = 3 . \text{ ב } \quad (2)$$

$$B_{U \cap V} = \{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\} \quad , \quad \dim(U \cap V) = 2 . \text{ ג }$$

$$\begin{cases} -3x + 5y + 2z = 0 \\ -3x - y + 2t = 0 \end{cases}, B_U = \{(1, 1, -1, 2), (0, 2, -5, 1)\} , \dim U = 2 \quad (2)$$

$$-8x - y + 5z + 2t = 0 , B_V = \{(1, -1, 1, 1), (0, 1, 1, -2), (0, 0, 2, -5)\} , \dim V = 3 \quad (3)$$

$$B_{U+V} = \{(1, 1, -1, 2), (0, -4, 10, -2), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\} , \dim(U + V) = 4 \quad (4)$$

$$B_{U \cap V} = \{(5, 1, 5, 8)\} , \dim(U \cap V) = 1 \quad (5)$$

6 כן.

7 לא.

וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס

שאלות

בשאלות 1-5 נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1 = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)\}, \quad B_2 = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

1) מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

2) מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

3) מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

4) מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_2}^{B_1}$.

5) אשרו את הטענות הבאות :

$$[M]_{B_2}^{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [v]_{B_2} . 1$$

$$[M]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [v]_{B_1} . 2$$

$$[M]_{B_1}^{B_2} = \left([M]_{B_2}^{B_1} \right)^{-1} . 3$$

תשובות סופיות

$$(1) (x, y - x - z, z)$$

$$(2) (x, y, z - x - y)$$

$$(3) [M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) [M]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

5) שאלת הוכחה.

אלגברה ליניארית

פרק 2 - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

תוכן העניינים

1. פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות.....	15
2. מערכות עם פרמטר.....	18

פתרונות וחקירת מערכות של משוואות לינאריות

שאלות

1) מצאו אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

$$\begin{array}{lll} 2x+y=4 & x-y=0 & x-4y=-7 \\ x+y=3 \quad \text{ט.} & 2x+y=3 \quad \text{ג.} & x-y=-1 \quad \text{ב.} \\ & & 2x-2y=0 \quad \text{א.} \end{array}$$

2) רשמו את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{lll} x=3 & 2x+y+z=3 & x-4y+z=-7 \\ 2x+y=4 \quad \text{ט.} & x-z=0 \quad \text{ג.} & x-y=-1 \quad \text{ב.} \\ z+t=8 & & x+y+z=5 \quad \text{א.} \end{array} \quad \begin{array}{lll} x+10y=11 & 2x-2=0 & x+y=3 \end{array}$$

בשאלות **3-5** בצעו על כל מטריצה את הפעולות הרשומות מתחתייה, בזו אחר זו, ומצאו את המטריצה המתבקשת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(5)} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(4)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{(3)}$$

$$R_1 \rightarrow R_1 + 3R_3, R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3$$

$$R_2 \rightarrow 4R_2, R_2 \rightarrow R_2 + R_1$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \rightarrow 2R_1$$

$$R_1 \rightarrow 5R_1 - 8R_2$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2$$

$$R_3 \rightarrow R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3$$

6) מצאו איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאלי,

כדי לקבל את המטריצה מימין:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{א.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ג.}$$

**בשאלות 7-10 הביאו את המטריצות הבאות לצורה מדורגת
(בשאלות 7, 9-1 – גם לצורה מדורגת קנוונית) :**

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix} \quad (9)$$

בשאלות 11-22 פתרו את מערכות המשוואות בשיטת גaus (כלומר, על ידי דירוג) :

$$\begin{aligned} 4x + 8y = 20 \\ 3x + 6y = 15 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y = 8 \\ 5x - 4y = -3 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 10x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 32 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} 8x - 4y = 10 \\ -6x + 3y = 1 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z = 3 \\ 4x + 6y + 16z = 8 \\ 3x + 2y + 17z = 1 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z = -11 \\ 2x + 3y - z = -5 \\ 3x + y - z = 2 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} 4x - 7y = 0 \\ 8x - 14y = 2 \\ -16x + 28y = 4 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} x + 3y = 2 \\ 2x + y = -1 \\ x - y = -2 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + 2t = 2 \\ 2x + 5y - 8z + 6t = 5 \\ 6x + 8y - 10z + 4t = 8 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y = 1 \\ -9x + 6y = -3 \\ 6x - 4y = 2 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z = 2 \\ 3x - 2y - z = 5 \\ 2x - 5y + 3z = -4 \\ 2x + 8y + 12z = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 13x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

תשובות סופיות

1) א ו-ג שקולות, וב ו-ד שקולות.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} .\text{א} \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} .\text{ב} \quad \begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} .\text{א}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} .\text{כ}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -32 & 37 & -4 \\ -1 & 9 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} .\text{ג} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} .\text{ד} \quad \begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 10 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} .\text{ז}$$

$$R_2 \rightarrow 2R_2 + 4R_1 .\text{א} \quad R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1 .\text{ב} \quad R_1 \rightarrow 2R_1 + R_2 .\text{א}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} -\text{1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} .\text{ז}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} -\text{1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} .\text{ט} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .\text{ז}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .\text{ז}$$

$$\phi .\text{ז} \quad (x, y) = (5 - 2t, t) .\text{ז} \quad (x, y) = (1, 2) .\text{ז}$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, -3, -2) .\text{ז} \quad \phi .\text{ז}$$

$$(x, y) = (-1, 1) .\text{ז} \quad (x, y, z) = (-1 - 7t, 2 + 2t, t) .\text{ז}$$

$$(x, y) = \left(\frac{1+2t}{3}, t \right) .\text{ז} \quad \phi .\text{ז}$$

$$\phi .\text{ז} \quad (x, y, z, t) = (-a + 2b, 1 + 2a - 2b, a, b) .\text{ז}$$

$$(x, y, z) = (2, 1, -1) .\text{ז}$$

מערכות עם פרמטר

שאלות

בשאלות **1-6** מצאו לאילו ערכי k (אם יש כהלה) יש למערכות:
 1. פתרון יחיד. 2. אפ' פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ 5x - 7y + (k^2 + 3)z &= k^2 + 1 \quad (1) \\ 3x - y + (k + 3)z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + ky + z &= 1 \\ x + y + kz &= 1 \quad (2) \\ kx + y + z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2ky + z &= 0 \\ 3x + y + kz &= 2 \quad (3) \\ x + 9ky + 5z &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 0 \quad (4) \\ 5x + (1-k)y + k^2z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} kx - y &= 1 \\ (k-2)x + ky &= -2 \quad (5) \\ (k^2 - 1)z &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + ky + 3z &= 2 \\ kx - y + z &= 4 \quad (6) \\ 3x + y + (2+k)z &= 0 \end{aligned}$$

בשאלות 7-8 מצאו לאיילו ערכי k (אם יש כ אלה) ישמערכות:
 1. פתרון יחיד. 2. אפ. פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$2x + ky = 3$$

$$(k+3)x + 2y = k^2 + 5 \quad (7)$$

$$6x + 3ky = 7k^2 + 2$$

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 1 \\ 4x + (k^2 - 5k)y + 2z &= k \end{aligned} \quad (8)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{array} \right\}$$

9) נתונה המערכת:

- .א. רשמו את המטריצה המתאימה למערכת המשווהות.
- .ב. רשמו את הצורה המדורה של המטריצה מסעיף א.
- .ג. מצאו לאיילו ערכי k יש למערכת:
- .ד. פתרון יחיד. 2. אפ. פתרון. 3. אינסוף פתרונות.
- .ה. רשמו את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.
- .ו. מצאו לאיילו ערכי k יש למערכת פתרון יחיד שבו $z = 0$.
- .ז. מצאו עבור أيזה ערך של k פתרון של המשווהה השלישי הוא $(1, 2, 3)$.
האם יתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבירו.
- .ח. מצאו לאיזה ערך של k , $(1, 0, 0)$ הוא הפתרון היחיד של המערכת.

תשובות סופיות

$$k = -2 \cdot 3 \quad k = 1 \cdot 2 \quad k \neq 1, k \neq -2 \cdot 1 \quad (1)$$

$$k = 1 \cdot 3 \quad k = -2 \cdot 2 \quad k \neq 1, k \neq -2 \cdot 1 \quad (2)$$

$$k = -1 \cdot 3 \quad k = \frac{4}{7} \cdot 2 \quad k \neq -1, k \neq \frac{4}{7} \cdot 1 \quad (3)$$

$$k = 1, k = -0.4 \cdot 2 \quad k \neq 1, k \neq -0.4 \cdot 1 \quad (4)$$

$$k = \pm 1, k = -2 \cdot 2 \quad k \neq \pm 1, k \neq -2 \cdot 1 \quad (5)$$

$$k = -1, k = -3, k = 2 \cdot 3 \quad k \neq -1, k \neq -3, k \neq 2 \cdot 1 \quad (6)$$

$$k = 1 \cdot 3 \quad k \neq \pm 1 \cdot 2 \quad k = -1 \cdot 1 \quad (7)$$

$$k \neq 3 \cdot 3 \quad k = 3 \cdot 2 \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2 + 4 & k^2 - 4 \\ 0 & 0 & -k^2 + k + 2 & 4 - k^2 \end{pmatrix} \text{ ב. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2 + 1 & k^2 - 1 \\ 4 & -6 & k + 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ נ. } (9)$$

$$(x, y, z) = (1 + 0.2t, 0.8t, t) \quad \text{ב. } k = 2 \cdot 3 \quad k = -1 \cdot 2 \quad k \neq 2, k \neq -1 \cdot 1 \quad .\text{ג.}$$

$$k = -2 \cdot 1 \quad \text{ל. } k = 2 \cdot 1 \quad k = -2 \cdot 1 \quad k = \pm 2 \cdot 1$$

אלגברה לינארית

פרק 3 - מטריצות

תוכן העניינים

21	1. מטריצות
23	2. מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות
24	3. המטריצה ההפכית

מטריצות

שאלות

1) נתונות המטריצות הבאות: $A_{4 \times 6}$, $B_{4 \times 6}$, $C_{6 \times 2}$, $D_{4 \times 2}$, $E_{6 \times 4}$.

קבעו אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.

במידה והמטריצה מוגדרת, רשמו את סדר המטריצה:

A. $AE - B$. ת

ג. $AC - D$

ב. AB

א. $A + B$

ח. $E^T B$

ו. $(E + A^T)D$

ז. $E(B + A)$

ה. $B + AB$

י. $E(B - A)$

ט. $E(AC)$

2) מצאו את z , אם ידוע כי x, y, z

$$\cdot \begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$$

בשאלות 3-8 נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו (במידה וניתן):

ב. $E - D + I_3$ א. $E + D$ (3)

ד. $2D + 4EI_3$ ג. $5C$

ה. $2\operatorname{tr}(D^2 - 2E)$ (4)

ו. $\frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C$ ז. $4C^T + A$ א. (5)

ח. I_2BC (6)

ט. $\operatorname{tr}(C^T C)$ (7)

ע. $DABC$ (8)

תשובות סופיות

$$\text{ה. לא.} \quad \text{ד. לא.} \quad \text{ג. } 4 \times 2 \quad \text{ב. לא.} \quad \text{א. } 4 \times 6 \quad \text{(1)}$$

$$\text{כ. } 6 \times 6 \quad \text{ט. } 6 \times 2 \quad \text{ח. לא.} \quad \text{נ. } 6 \times 2 \quad \text{ז. } 6 \times 6 \quad \text{(2)}$$

$$(x, y, z) = (2, 1, -1) \quad \text{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix} \cdot \text{?} \quad \begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix} \cdot \text{?} \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix} \cdot \text{?} \quad \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \text{?} \quad \text{א. } (3)$$

230 (4)

$$\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix} \cdot \text{?} \quad \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix} \cdot \text{?} \quad \text{א. } (5)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix} \quad \text{(6)}$$

63 (7)

$$\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix} \quad \text{(8)}$$

מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות

שאלות

מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T = A$, ואנטי-סימטרית אם $A^T = -A$.

1) ידוע ש- A מטריצה ריבועית.

מי מבין הבאים נכון (אחד או יותר) :

1. AA^T סימטרית. 2. $A+A^T$ סימטרית. 3. $A-A^T$ אנטיסימטרית.

2) ידוע ש- A ו- B אנטיסימטריות מאותו סדר.

מי מבין הבאים נכון :

1. $BABABA$ אנטיסימטרית. 2. $A^2 - B^2$ סימטרית. 3. A^2 סימטרית.

3) ידוע ש- A ו- B סימטריות מאותו סדר ונთון כי $AB = -BA$.

מי מבין הבאים נכון :

1. AB^3 אנטיסימטרית. 2. AB^2 סימטרית. 3. $(A-B)^2$ סימטרית.

4) ידוע ש- A סימטרית ו- B אנטיסימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB = BA$.

הוכחו : 1. AB אנטיסימטרית. 2. $AB+B$ אנטיסימטרית.

5) נתון : A, B, AB סימטריות מאותו סדר.

הוכחו כי $A^4B^4 = B^4A^4$.

תשובות סופיות

1) 1,2,3

2) 2

3) 1,2,3

4) שאלת הוכחה.

5) שאלת הוכחה.

המטריצה ההפכית

שאלות

בשאלות 1-6 מצאו את ההפוכה של כל מטריצה.
בדקו את התשובה על ידי כפל מטריצות מתאימים.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

7) עברו אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\underline{\text{הפייכה?}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$$

הנימו שהמטריצות בשאלות 8-10 הן הפיכות מסדר n , וחלצו את המטריצה X :

$$P^{-1}X^T P = A \quad . \text{ג.} \quad A^{-1}XC = A^{-1}DC \quad . \text{ב.} \quad AX = D \quad . \text{א.} \quad (8)$$

$$(A - AX)^{-1} = X^{-1}C \quad . \text{ב.} \quad C^{-1}(A + X)D^{-2} = I \quad . \text{א.} \quad (9)$$

$$ABC^T X^{-1}BA^T C = AB^T \quad (10)$$

11) נתון $. B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$

חשבו את המטריצה X , אם ידוע כי I

$$. BYB^T = B^{-1} + B \quad . \text{ח辩证 את المatriца } Y, \text{ אם ידוע כי } B \quad (12) \text{ נתון}$$

13) נתון $. A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

חשבו את המטריצה B , אם נתון בנוסח כי : $. 5A^T B(I + 2A)^{-2} = (7A)^{-2}$

14) בסעיפים הבאים מצאו מטריצות A , \underline{x} ו- \underline{b} , המבטאות את מערכת המשוואות

$$\text{הנתונה ע"י המשוואת היחידה : } A\underline{x} = \underline{b}$$

$$2x + y - z = 3$$

$$x + 2y - 4z = 5 \quad \text{א.}$$

$$6x + 4y + z = 2$$

$$2x - 3y + z + t = 1$$

$$4x + y + 2z = 4$$

$$y + z + t = 1$$

$$x - 4z - 2y = 10$$

$$2x - y + z = 3$$

15) פתרו את המערכת הבאה בעזרת המטריצה ההפוכה :

$$5x - 3y + 4z = 11$$

$$x + 4y + 2z + 4t = 1$$

$$x + 2y - z = 0$$

$$y + z + t = 1$$

$$x + 3y - z - 2t = 0$$

16) פתרו את המערכת הבאה בעזרת המטריצה ההפוכה :

תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$k \neq 1, k \neq -2 \quad (7)$$

$$(P^{-1})^T A^T P^T . \text{ז} \quad D . \text{ב.} \quad A^{-1} D C^{-1} . \text{א} \quad (8)$$

$$(A + C^{-1})^{-1} A . \text{ב} \quad CD^2 - A . \text{א} \quad (9)$$

$$BA^T C(B^{-1})^T BC^T \quad (10)$$

$$X = 4 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$B = \frac{1}{245} \begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} . \text{א} \quad (14)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} . \text{ב}$$

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) \quad (15)$$

$$(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2) \quad (16)$$

אלגברה לינארית

פרק 4 - דטרמיננטות

תוכן העניינים

27	1. חישוב דטרמיננטות
30	2. כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות
31	3. מטריצה צמודה ומטריצה הפוכה

чисוב דטרמיננטות

שאלות

בשאלוֹת 1-5 חשבו את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פתרונות לפי שורה/עמודה) :

$$\begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} .\text{ג.}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} .\text{ב.}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} .\text{1 א.}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} .\text{ג.}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} .\text{ב.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} .\text{2 א.}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} .\text{ג.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix} .\text{ב.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} .\text{3 א.}$$

4) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי דירוג :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} .\text{ג.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} .\text{ב.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} .\text{א.}$$

בשאלוֹת 5-6 חשבו את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} .\text{6}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{vmatrix} .\text{5}$$

בשאלוֹת 7-8 הראו, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס :

$$\begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{vmatrix} .\text{ג.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} .\text{ב.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} .\text{7 א.}$$

$$\begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix} .\text{ב.}$$

$$\begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} .\text{8 א.}$$

$$\text{בשאלוֹת 9-11 נתוּן כי } \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$$

חשבו :

$$\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix} \quad (10) \quad \begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (11)$$

$$\text{12) הוכיחו כי : } \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

. $|A|=4$, $|B|=2$ ו- B מטריצות מסדר 3, ו- A מטריצות מסדר 2 נתוּן כי
حسبו :

$$|4A^2B^3| \text{ ב.} \quad |ABA^{-1}B^T| \text{ א.} \quad (13)$$

$$|-2A^2A^TadjB| \text{ ב.} \quad |-A^{-2}B^TA^3| \text{ א.} \quad (14)$$

. $|A|=2$, $2AB+3I=0$, ו- B מטריצות הפיקות מסדר 4 נתוּן כי A ו-
حسبו את $|B|$.

. $A+3B=0$, $B^2-2A^{-1}=0$, ו- B מטריצות הפיקות מסדר 3 נתוּן כי A ו-
حسبו את $|A|$, $|B|$.

. $2AB=B^TA^2$, $|A|=128$, ו- B הפיכה.
מצאו את n .

תשובות סופיות

$$\text{ג. } -1 \quad \text{ב. } 29 \quad \text{א. } ad - bc \quad \text{(1)}$$

$$\text{ג. } -14 \quad \text{ב. } -3 \quad \text{א. } -1 \quad \text{(2)}$$

$$\text{ג. } -300 \quad \text{ב. } 234 \quad \text{א. } 24 \quad \text{(3)}$$

$$\text{ג. } 3 \quad \text{ב. } 0 \quad \text{א. } 0 \quad \text{(4)}$$

$$120 \quad \text{(5)}$$

$$114 \quad \text{(6)}$$

(7) פתרונות באתר www.GooL.co.il

(8) פתרונות באתר.

$$-8 \quad \text{(9)}$$

$$16 \quad \text{(10)}$$

$$-36 \quad \text{(11)}$$

(12) הוכחה.

$$2^{13} \quad \text{ב. } 4 \quad \text{א. (13)}$$

$$-2^{11} \quad \text{ב. } -8 \quad \text{א. (14)}$$

$$\frac{81}{32} \quad \text{(15)}$$

$$|A|=18, |B|=-2/3 \quad \text{(16)}$$

$$7 \quad \text{(17)}$$

כל קרמר ופתרון מערכת משוואות

שאלות

בשאלות 1-3 פתרו את מערכות המשוואות בעזרת כל קרמר:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 3x + 4y &= 11 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x + z &= 3 \\ 4x + y + 8z &= 21 \\ 2x + 3z &= 8 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x + 2z + 5t &= 8 \\ -2x - 6y &= -8 \\ 5x + 3y - 7z + 4t &= 5 \\ 2x + 5y + 44z &= 51 \end{aligned} \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$x = 1, y = 2 \quad (1)$$

$$x = 1, y = 1, z = 2 \quad (2)$$

$$x = y = z = t = 1 \quad (3)$$

מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו את הצמודה הקלסית ($adj(A)$), ובעזרתה את A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$adj(A) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

אלגברה לינארית

פרק 5 - ערכים עצמאיים, וקטוריים עצמאיים ולכ索ן מטריצות

תוכן העניינים

1. ערכים עצמאיים וקטוריים עצמאיים ולכ索ן מטריצות.....32

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לבסן

שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 1-4 מצאו ערכים עצמיים ו-קטורים עצמיים :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$(5) \text{ עבור המטריצה } A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

- א. מצאו מטריצה אופיינית.
 - ב. מצאו פולינום אופייני.
 - ג. מצאו ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.
 - ד. מצאו מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.
 - ה. מצאו וקטורים עצמיים.
 - ו. קבעו האם המטריצה ניתנת ללבסן.
 - ז. במידה והמטריצה ניתנת ללבסן, לכסנו אותה.
- כלומר, מצאו מטריצה הפיכה P , כך ש- $D = P^{-1}AP$, כאשר D מטריצה אלכסונית.
- ח. במידה והמטריצה ניתנת ללבסן, חשבו A^{2009} .
 - ט. מצאו את הפולינום המינימלי.
 - י. קבעו האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים.
- במידה והמטריצה הפיכה, בטאו את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד, תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

$$6) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} k-2 & 2k & k+1 \\ k-1 & -1 & 2 \\ -k & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

לאיזה ערך של הפרמטר k המספר 2 יהיה ערך עצמי של המטריצה A ?

$$7) \text{ נתונה המטריצה המשנית } A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}.$$

א. מצאו את ערכי a ו- b , עבורם העי"ע-ים של A יהיו 1 ו-1 בלבד.

ב. עבור ערכי a ו- b שנמצאו בסעיף א, קבעו האם המטריצה לכסינה.

8) תהי A מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3 .

$$\text{ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם } v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

והם מתאימים לערכים העצמיים $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -4$.

מצאו את המטריצה A .

9) קבעו האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3 , בעלת וקטורים עצמיים

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3, \text{ המתאימים לערכים העצמיים } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

במידה וקיימת מטריצה כזו, מצאו אותה.

10) הוכחו או הפריכו:

א. כל מטריצה הניתנת ללכsoon היא הפיכה.

ב. כל מטריצה הניתנת ללכsoon היא לא הפיכה.

ג. כל מטריצה הפיכה ניתנת ללכsoon.

ד. קיימת מטריצה A אשר הווקטור $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ הוא וי"ע שלה, השוויך לעי"ע 14.

- 11)** נתונה מטריצה ריבועית A .
הוכיחו או הפריכו:
- 0 ערך עצמי של המטריצה A אם ורק אם המטריצה איננה הפיכה.
 - אם A הפיכה ו- λ ע"ע של A , אז $\frac{1}{\lambda}$ הוא ערך עצמי של A^{-1} .
 - $-A$ ול- A^T יש את אותו פולינום אופייני.
 - $-A$ ול- A^T יש את אותם וקטוריים עצמיים.
 - אם סכום האיברים בכל שורה של A הוא λ , אז λ הוא ע"ע של A .
 - אם $A^{-1} = A^T$ ואם λ הוא ע"ע של A , אז $\lambda = \pm 1$.
 - אם $A^2 = A$ ואם λ הוא ע"ע של A , אז $\lambda = 0$ או $\lambda = 1$.

תשובות סופיות

1) ערכים עצמיים : $x_1 = 2, x_{2,3} = 3$

$$\nu_{x=3}^{(1)} = (1,0,1), \quad \nu_{x=3}^{(2)} = (1,1,0), \quad V_{x=2} = (1,1,1)$$

$$\nu_{x=-2} = (-1,1,1), \quad \nu_{x=3} = (1,2,1), \quad \nu_{x=1} = (-1,4,1), \quad x=1, x=3, x=-2 \quad (2)$$

$$\nu_{x=-1} = (-1,0,1), \quad \nu_{x=4} = (1,1,1), \quad \nu_{x=1} = (1,-2,1), \quad x=1, x=4, x=-1 \quad (3)$$

$$\nu_{x=3} = (1,2), \quad \nu_{x=1} = (-1,2), \quad x=-1, x=3 \quad (4)$$

$$p(x) = (x-6)(x-2)(x+4) \text{ ב. } \begin{bmatrix} x+1 & -3 & 0 \\ -3 & x+1 & 0 \\ 2 & 2 & x-6 \end{bmatrix} \text{ א. } (5)$$

$$x=6, x=2, x=-4 \text{ ג.}$$

$x=-4$ – ריבוב אלגברי : 1, $x=2$ – ריבוב אלגברי : 1, $x=6$ – ריבוב אלגברי : 1.

$$V_{x=6} = sp\{\langle 0,0,1 \rangle\} \text{ ד.}$$

$$V_{x=2} = sp\{\langle 1,1,1 \rangle\} \text{ – ריבוב גיאומטרי : 1.}$$

$$V_{x=-4} = sp\{\langle -1,1,0 \rangle\} \text{ – ריבוב גיאומטרי : 1.}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ג.} \quad \text{ה. ניתנת ללקסון.} \quad \langle 0,0,1 \rangle, \langle -1,1,0 \rangle, \langle 1,1,1 \rangle \text{ ה.}$$

$$\text{ט.} \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2^{2017} + (-4)^{2017} & 2^{2017} - (-4)^{2017} & 0 \\ 2^{2017} - (-4)^{2017} & 2^{2017} + (-4)^{2017} & 0 \\ -6^{2017} + 2^{2017} & -6^{2017} + 2^{2017} & 2 \cdot 6^{2017} \end{bmatrix} \text{ ח.}$$

$$m(x) = (x-6)(x-2)(x+4)$$

ג. הפיכה.

$$k_1 = 3, k_2 = -\frac{32}{9} \quad (6)$$

ב. לא לשתייה. $a=1, b=0$ או $a=3, b=-4$ א. (7)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \quad (8)$$

ג. אין כזו מטריצה. (9)

$$(10) \text{ א. הפרכה: } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ג. } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ ב. } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ד. הוכחה.}$$

(11) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הפרכה. ד. הוכחה.

ה. הוכחה. ג. הוכחה. ז. הוכחה. ו. הוכחה.